1. Δίνεται η καμπύλη

$$c(t) = (R \cdot \cos^3 t, \ R \sin^3 t) \ , \quad t \in [0, 2\pi]$$

όπου R θετικός πραγματικός αριθμός.

(i) Να εξετάσετε την c ως προς την κανονικότητα

(ii) Να υπολογιστεί το μήκος τόξου με αφετηρία $t_0 = 0$

(iii) Να υπολογιστεί το μήκος της c.

(iv) Βρείτε την αναπαραμέτρηση της c με παράμετρο το μήκος τόξου.

1. Είναι, $c(t) = (R\cdot\cos^3 t, R\cdot\sin^3 t)$, $t\in[0,2\pi]$

(i). $c'(t) = (-3R\cdot\cos^2 t\cdot\sin t, 3R\sin^2 t\cos t)$, $t\in\mathbb{R}$

$$c'(t) = (0,0) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos^2 t\cdot\sin t = 0 \\ \sin^2 t\cdot\cos t = 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow$$

$\boxed{t=0}$ ή $\boxed{t=\frac{\pi}{2}}$ ή $\boxed{t=\frac{3\pi}{2}}$ ή $\boxed{t=2\pi}$.

Οπότε, η c δεν είναι κανονική.

(ii). $$S = s(t) = \int_0^t \|c'(\tau)\|\,d\tau =$$

$$\int_0^t \sqrt{9R^2(\cos^4\tau\cdot\sin^2\tau + \sin^4\tau\cdot\cos^2\tau)}\,d\tau =$$

$$\int_0^t 3R\sqrt{\cos^2\tau\cdot\sin^2\tau\,(\underbrace{\cos^2\tau+\sin^2\tau}_{1})}\,d\tau =$$

$$\int_0^t 3R\,|\cos\tau\cdot\sin\tau|\,d\tau = \frac{3R}{2}\int_0^t |\sin 2\tau|\,d\tau .$$

1). Αν $t \in [0, \frac{\pi}{2})$:

$$s(t) = \frac{3R}{2} \cdot \int_0^t \sin 2\tau \, d\tau = -\frac{3R}{4} \cdot \left[\cos 2\tau\right]_0^t$$

$$= \frac{3R}{4} \cdot (1 - \cos 2t) .$$

2) Αν $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$:

$$s(t) = \frac{3R}{2} \cdot \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\tau \, d\tau - \int_{\frac{\pi}{2}}^t \sin 2\tau \, d\tau \right\}$$

$$= -\frac{3R}{4} \cdot \left\{ \left[\cos 2\tau\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\cos 2\tau\right]_{\frac{\pi}{2}}^t \right\}$$

$$= -\frac{3R}{4} \cdot \left(\cos \pi - \cos 0 + \cos 2t - \cos \pi \right)$$

$$= -\frac{3R}{4} \left(-1 - 1 + \cos 2t + 1 \right)$$

$$= \frac{3R}{4} \left(1 + \cos 2t \right).$$

3) Αν $t \in [\pi, \frac{3\pi}{2})$:

$$s(t) = \frac{3R}{2} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\tau \, d\tau - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2\tau \, d\tau + \int_{\pi}^{t} \sin 2\tau \, d\tau \right\}$$

$$= -\frac{3R}{4} \cdot \left\{ \left[\cos 2\tau\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\cos 2\tau\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \left[\cos 2\tau\right]_{\pi}^{t} \right\}$$

$$= -\frac{3R}{4}\left(\cos\pi - \cos 0 - \cos 2\pi + \cos\pi + \cos 2t - \cos 2\pi\right)$$

$$= -\frac{3R}{4}\left(-1 - 1 - 1 - 1 + \cos 2t - 1\right)$$

$$= \frac{3R}{4}\left(5 - \cos 2t\right).$$

4) Αν $t \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$:

$$S(t) = \frac{3R}{2}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\tau \, d\tau - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2\tau \, d\tau + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin 2\tau \, d\tau - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{t} \sin 2\tau \, d\tau\right\}$$

$$= -\frac{3R}{4}\left\{\left[\cos 2\tau\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\cos 2\tau\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \left[\cos 2\tau\right]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} - \left[\cos 2\tau\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{t}\right\}$$

$$= -\frac{3R}{4}\left(\cos\pi - \cos 0 - \cos 2\pi + \cos\pi + \cos 3\pi - \cos 2\pi - \cos 2t + \cos 3\pi\right)$$

$$= -\frac{3R}{4}\left(-1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - \cos 2t - 1\right)$$

$$= \frac{3R}{4}\left(7 + \cos 2t\right).$$

Επομένως,

$$S = S(t) = \begin{cases} \frac{3R}{4}(1-\cos 2t), & t\in[0,\frac{\pi}{2}) \\ \frac{3R}{4}(1+\cos 2t), & t\in[\frac{\pi}{2},\pi) \\ \frac{3R}{4}(5-\cos 2t), & t\in[\pi,\frac{3\pi}{2}) \\ \frac{3R}{4}(7+\cos 2t), & t\in[\frac{3\pi}{2},2\pi] \end{cases}$$

(iii). Το μήκος της καμπύλης είναι:

$$L_0^{2\pi}(c) = \frac{3R}{2}\cdot\int_0^{2\pi} |\sin 2t|\, dt$$

$$= \frac{3R}{2}\cdot\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\, dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2t\, dt + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin 2t\, dt - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin 2t\, dt\right\}$$

$$= \frac{3R}{4}\left\{-\Big[\cos 2t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \Big[\cos 2t\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \Big[\cos 2t\Big]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} + \Big[\cos 2t\Big]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\right\}$$

$$= \frac{3R}{4}\cdot\left(\cos 0 - \cos\pi + \cos 2\pi - \cos\pi + \cos 2\pi - \cos 3\pi + \cos 4\pi - \cos 3\pi\right)$$

$$= \frac{3R}{4}\left(1+1+1+1+1+1+1+1\right) = \frac{3R}{4}\cdot 8 = 6R.$$

(iv).

1) Αν $t \in [0, \frac{\pi}{2})$:

$$s = \frac{3R}{4} \cdot (1 - \cos 2t) \Rightarrow \frac{4s}{3R} = 1 - \cos 2t \Rightarrow$$

$$1 - \frac{4s}{3R} = \cos 2t \xRightarrow{\text{Μονότονη}} t = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{Arc}\cos\left(1 - \frac{4s}{3R}\right)$$

Άρα, η καμπύλη

$$c(t) = (R\cos^3 t, R\sin^3 t) \quad \text{για} \quad t = \frac{1}{2}\mathrm{Arc}\cos\left(1 - \frac{4s}{3R}\right)$$

γίνεται:

$$c(s) = \left(R \cdot \cos^3\left(\frac{1}{2}\mathrm{Arc}\cos\left(1 - \frac{4s}{3R}\right)\right), R\sin^3\left(\frac{1}{2}\mathrm{Arc}\cos\left(1 - \frac{4s}{3R}\right)\right)\right)$$

Ανάλογα εξετάζονται και οι υπόλοιπες τρεις περιπτώσεις. □

3. Να βρεθεί η καμπύλη $c(s)$ του $\mathbb{R}^2$ με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in \mathbb{R}$ και καμπυλότητα $k(s) = \frac{1}{3}$ τέτοια ώστε $c(0) = (0,0)$ και $\vec{t}(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

<u>ΛΥΣΗ</u>:

Εφόσον, δίνεται η καμπυλότητα από το θεμελιώδες θεώρημα υπάρχει καμπύλη με αυτή την καμπυλότητα.

$c(s) = (x(s), y(s))$ και $\vec{t}(s) = \mathring{c}(s) = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s))$

$$k(s) = \frac{d\varphi}{ds}(s) = \frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^s \frac{d\varphi}{ds}(s)\, ds = \frac{1}{3}s \Rightarrow \varphi(s) - \varphi(0) = \frac{1}{3}s$$

Δίνεται ότι $\vec{t}(0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \varphi(0) = \frac{\pi}{4}$

Οπότε, $\varphi(s) = \frac{1}{3}s + \frac{\pi}{4}$, $s \in \mathbb{R}$

Άρα, $\mathring{c}(s) = \left(\cos\left(\frac{s}{3} + \frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{s}{3} + \frac{\pi}{4}\right)\right) \Rightarrow$

$$\int_0^s \mathring{c}(\tau)\, d\tau = \left(\int_0^s \cos\left(\frac{\tau}{3} + \frac{\pi}{4}\right) d\tau, \int_0^s \sin\left(\frac{\tau}{3} + \frac{\pi}{4}\right) d\tau\right) \Rightarrow$$

$$c(s) - \cancel{c(0)}^{\,0} = \left(3\left[\sin\left(\frac{s}{3} + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\frac{\pi}{4}\right], -3\left[\cos\left(\frac{s}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\frac{\pi}{4}\right]\right)$$

Επομένως, $c(s) = \left(\overbrace{3\sin\left(\frac{s}{3} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{\sqrt{2}}}^{=x(s)}, \underbrace{-3\cos\left(\frac{s}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{\sqrt{2}}}_{=y(s)}\right)$, $s \in \mathbb{R}$

Παρατηρούμε ότι:

$$\left(x(s)+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(y(s)-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2=$$

$$9\cdot\sin^2\left(\frac{s}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+9\cdot\cos^2\left(\frac{s}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=$$

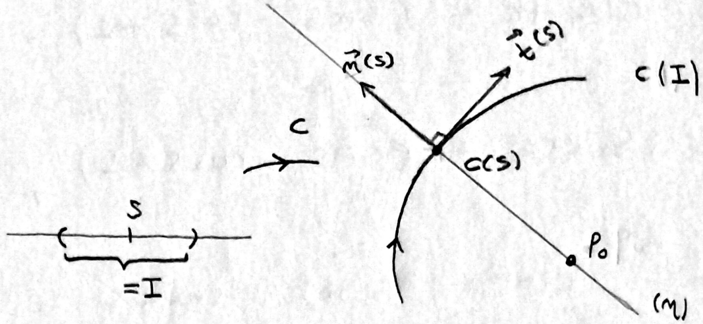
$$9\left(\sin^2\left(\frac{s}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+\cos^2\left(\frac{s}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$

$$9\cdot 1=9=3^2.$$

Δηλαδή, η καμπύλη c είναι κύκλος με κέντρο το σημείο $K\left(-\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ και ακτίνα $R=3$.

5. Αποδείξτε ότι οι μόνες καμπύλες του $\mathbb{R}^2$ που έχουν την ιδιότητα ότι οι κάθετες ευθείες που διέρχονται από σταθερό σημείο p_0 είναι τόξα κύκλου κέντρου p_0.

ΛΥΣΗ:



Έστω $c(s)$: επίπεδη καμπύλη, s : μήκος τόξου και τ/ω να έχει την ιδιότητα της εκφώνησης.

Η κάθετη ευθεία της $c(s)$ περιγράφεται από τη διανυσματική εξίσωση:

$$(n): \quad r = c(s) + \lambda \vec{n}(s), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Από την υπόθεση, $\forall s \in I$, $\exists \lambda = \lambda(s)$ τ/ω

$$p_0 = c(s) + \lambda(s)\vec{n}(s) \quad (*)$$

Πολ/ζω εσωτερικώς με $\vec{n}(s)$, οπότε:

$$\langle p_0, \vec{n}(s)\rangle = \langle c(s), \vec{n}(s)\rangle + \lambda(s)\cancelto{1}{\langle \vec{n}(s), \vec{n}(s)\rangle}$$

$$\lambda(s) = \langle p_0, \vec{n}(s)\rangle - \langle c(s), \vec{n}(s)\rangle, \quad s \in I.$$

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση $\lambda(s)$ είναι παραγωγίσιμη, ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Οπότε, παραγωγίζοντας την (*) συνάγουμε ότι:

$$0 = \dot{c}(s) + \dot{\lambda}(s)\vec{n}(s) + \lambda(s)\dot{\vec{n}}(s) \xRightarrow{\text{Frenet}}$$

$$0 = \vec{t}(s) + \dot{\lambda}(s)\vec{n}(s) + \lambda(s)k(s)\vec{t}(s) \Rightarrow$$

$$0 = (1-\lambda(s)k(s))\vec{t}(s) + \dot{\lambda}(s)\vec{n}(s) \xRightarrow[\text{ανεξαρτ.}]{\vec{t},\vec{n}\text{ γραμ}}$$

$$1-\lambda(s)k(s) = 0 \quad \text{και} \quad \dot{\lambda}(s) = 0, \quad \forall s \in I$$

$$k(s) = \frac{1}{\lambda(s)} \quad \text{και} \quad \lambda(s) = R := \text{σταθ}, \quad \forall s \in I$$

Άρα, $k(s) = \dfrac{1}{R}$, $\forall s \in I$.

Αυτό σημαίνει ότι η καμπύλη που μας ζητήθηκε είναι τόξο κύκλου και μάλιστα κέντρου p_0 γιατί, $\|p_0 - c(s)\| = \|\lambda(s)\vec{n}(s)\| = |\lambda(s)| = |R|$